ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматика және ақпараттық технология институты
Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

Әмірбек Дарын

Ішкі резонанс жағдайында орнықтылықты зерттеу

ДИПЛОМДЫҚ ЖҰМЫС

6В06103 - Математикалық және компьютерлік модельдеу

Алматы 2024

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматика және ақпараттық технология институты
Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

ҚОРҒАУҒА ЖІБЕРІЛДІ
Математика кафедрасының меңгерушісі физика-математика ғылымдарының кандидаты,қауымдастырылған профессор Тулешева Г.А.
____
«31» __05.__ 2024ж

ДИПЛОМДЫҚ ЖҰМЫС

Тақырыбы: « Ішкі резонанс жағдайында орнықтылықты зерттеу»

6В06103 - Математикалық және компьютерлік модельдеу

Орындағандар Әмірбек Дарын

Рецензент
Мұхамеджан Тынышбаев атындағы ALT Университетінің к.ф.-м.н. ассистент профессоры
______ Б.У.Уаисов
«31» мамыр 2024 ж.

HR департамент

Ғылыми жетекші
қауымдастырылған профессор
______ Сатыбалды Нұрпеисов
«31» мамыр 2024 ж.

Алматы 2024

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматика және ақпараттық технология институты
Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

6В06103 – Математикалық және компьютерлік модельдеу

БЕКІТЕМІН
Математика кафедрасының
меңгерушісі физика- математика
ғылымдарының, қауымдастырылған
профессор Тулешева Г.А.
____
«31» 05. 2024ж

Дипломдық жұмыс орындауға
ТАПСЫРМА

Білім алушы: Әмірбек Дарын
Тақырыбы:Ішкі резонанс жағдайында орнықтылықты зерттеу
Университет ректорының 2024 жылғы «1» қаңтардағы № 282-б бұйрығымен бекітілген
Аяқталған жұмысты тапсыру мерзімі: 2024 жылғы «27» 05 айы.
Дипломдық жобаның бастапқы деректері:
Дипломдық жұмыста әзірленуге жататын мәселелердің тізбесі немесе дипломдық жұмыстың қысқаша мазмұны:
Қозғалыс орнықтылығына шолу
САТЖ – нің оң шешімін табу туралы теорема
Ішкі резонанс кезіндегі орнықтылықты зерттеу қорытындысы
Ұсынылатын негізгі әдебиеттер 7 кітап.

Дипломдық жұмысты дайындау
КЕСТЕСІ

Бөлімдердің атаулары, әзірленетін мәселелердің тізбесі	Ғылыми жетекшіге ұсыну мерзімдері	Ескерту
Тақырыпқа байланысты арнайы әдібеттерді қарастыру	02.02.2024	орындалды
Дипломдық жұмыстың жоспарын құру	10.04.2023	орындалды
Негізгі бөлімді қарастыру	18.04.2024	орындалды
Дипломдық жұмысты қорытындылау	15.05.2024	орындалды

Қолтаңбалар

Аяқталған дипломдық жұмысқа консультанттар мен нормоконтролер оларға қатысты жұмыс бөлімдерін көрсете отырып

Бөлімдердің атаулары	Кеңесшілер Т.А.Ә. (мұғ. дәрежесі, атағы)	Қол қойылған Күні	Қолы
Негізгі бөлім	С.Нүрпеисов қауымдастырылған профессор	31.05.2024	
Норма бақылаушы	Шатманов Ж.Ж. физ.-мат. ғылымдарының кандидаты,қауымдастырылған профессор	29.05.2024	

Ғылыми жетекшісі ______________ С.Нүрпеисов

Білім алушы тапсырманы орындауға алды ______________ Әмірбек Дарын

Күні «31» 05 2024ж

АҢДАТПА

Бұл дипломдық жұмыста тақ ретті ішкі резонанс кезіндегі 3 – қосты таза жорамал түбірлі қауіпті жағдай үшін орнықтылықтың шарты алынған. Теңдеулер жүйесінде қарапайым түрге келтіру алмастырулары толық зерттеліп, қозғалыс орнықтылығы туралы және орнықтылық пен орнысыздық болу шарттары көрсетілген. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің оң шешімі болатынын дәлелдейтін шарт табылып, теорема дәлелденген. Кейбір авторлардың бұдан бұрынғы белгілі шешімдері осы дипломдық жұмыстың жеке жағдайы болып шығады.

АННОТАЦИЯ

В данной дипломной работе получено условие устойчивости для 3 – х чистых предположений при внутреннем резонансе нечетного порядка. В системе уравнений полностью изучены приведенные к простейшему виду подстановки, показаны условия устойчивости движения и устойчивости. Найдено условие, доказывающее, что система линейных алгебраических уравнений имеет положительное решение, и доказана теорема. Ранее известные решения некоторых авторов оказываются отдельным случаем данной дипломной работы.

ABSTRACT

In this thesis, a stability condition is obtained for 3 pure assumptions with an odd–order internal resonance. In the system of equations, the substitutions reduced to the simplest form are fully studied, the conditions of motion stability and stability are shown. The condition proving that the system of linear algebraic equations has a positive solution is found, and the theorem is proved. Previously known solutions by some authors turn out to be a separate case of this thesis.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Ғылымдардың ішіндегі ең абстракт ғылым – математика, онымен бірге ол іс жүзінде, практикада көп қолданылады. Әсіресе, қазіргі заманымызда ғылымның және техниканың қай салалары болса да математикалық әдістерді қолданбай өздерінің кемеліне жетпейтіндігі байқалып отыр.

Математиканың көптеген абстракт теориялары мен негізі принциптерінің жаратылыстану ғылымдары мен техниканың маңызды мәселелерін шешуге қолдану жолдары математиканың бір ірі бөлімі – дифференциалдық теңдеулер арқылы өтеді. Міне сол себептен көпшілікті, әсіресе студент жастарды жартылыстану ғылымдарының таңғажайып мәселелерін зерттеп, білуде дифференциалдық теңдеулер қалай қолданылатынын таныстыру мақсатымен осы дипломдық жұмысты ұсынып отырмын.

Бұл дипломдық жұмыста дифференциалдық теңдеулердің көмегімен табиғат құбылыстарының кейбір жасырын сырының қалай ашылғанын, оның өмірде қалай пайдаланғанын көрсету. Сондықтан бұл дипломдық жұмыста қозғалыстың орнықты және орнықсыз болуы туралы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің ішкі резонанс жағдайы зерттеліп ол туралы дұрыс қортындылар алынады.

Жаратылыстану ғылымдарындағы ең негізгі проблемалардың бірі – өзімізді қоршап тұрған табиғат құбылыстарындағы алуан түрлі процестерді зерттеу. Осы мәселелерді шешуде қолданылатын салалардың бірі – дифференциалдық теңдеулердің тууына түрткі болған табиғат құбылыстарын зерттеумен байланысты алуан түрлі физикалық проблемалар және бұлардың негізінде құрылған техникалық мәселелер.

1 Қозғалыс дифференциалдық теңдеулері

Табиғат құбылыстары бағынатын түрлі физикалық заңдар көбінесе дифференциалдық теңдеулер түрінде жазылады, ал дифференциалдық теңдеулердің өздері осы заңдарды сан жүзінде сипаттайтын негізгі құрал болып табылады.

Физикадан белгілі Ньютон заңдары дифференциалдық теңдеулер көмегімен зерттелген. Былайша айтқанда бұл заңдарды дифференциалдық теңдеулер арқылы өрнектеуге болады. Шынында массасы m материалдық нүкте, яғни дене, осы нүктенің орын жәйіне, жылдамдығына және уақытқа тәуелді күштің (оны F деп белгілейік) әсерімен түзу бойымен қозғалатын болсын. Сонда нүктеге әсер ететін күш

$$F = F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}\right).$$

мұндағы:

$$x = x(t), \qquad \frac{dx}{dt} = v = \dot{x}(t).$$

физикадан белгілі Ньютонның екінші заңы бойынша материалдық нүктеге әрекет етуші күштің әсерінен пайда болатын $w = \frac{d^2x}{dx^2}$ үдеу мен нүкте массасының көбейтіндісі осы күштің дәл өзіне тең

$$m\frac{d^2x}{dx^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1.1}$$

Бұл қозғалыс – екінші ретті дифференциалдық теңдеу, мұндағы білгісіз, - нүктенің қозғалыс заңын сипаттайтын функция

$$x = x(t).$$

Мәселен, аспанға тік жіберілген, ілгері тарту күшінің әсерімен қозғалушы ракетаны қарастыратын болсақ, бұл күштен өзге оған әрекет етуші күштері оның жылдамдығының квадратына пропорционал аэродинамикалық кедергі күш (немесе ауаның кедергі күші) $k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ және өзінің салмақ күші $m(t)g$.

Сонымен ракетағы әсер етуші күш:

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2} + k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m(t)g$$

Мұнда $m(t)$ – ракетаның лездік массасы – айнымалы шама уақытқа тәуелді. Ілгері тарту күшінің лездік мәні, ракета массасынан алынған туындыға пропорционал, яғни

$$C\frac{dm(t)}{dt}$$

Ендеше ракета қозғалысы келесі

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2} + K\left(\frac{dx}{dt^2}\right)^2 + m(t)g = C\frac{dm(t)}{dt}$$

дифференциалдық теңдеуімен сипатталады, мұндағы K мен C тұрақты.

(1.1) дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі былай тұжырымдалады: тәуелсіз айнымалы $t-$ нің еркімізше сайлап алған t_0 мәніндегі білгісіз $x = x(t)$ функциясының мәні $x_0 = x(t_0)$, ал оның $\dot{x}(t)$ туындысының мәні $\dot{x_0} = \dot{x}_0(t)$ болатындай, яғни шарттарды

$$x(t_0) = x_0\ , \dot{x_0}(t) = \dot{x}_0(t) \tag{1.2}$$

Қанағаттандыратындай (1.1) дифференциалдық теңдеудің шешімін табу керек. (1.2) шарттарды бастапқы шарттар дейді. Мысалы үшін келесі физикалық есепті қарастырайық.

Жоғарғы тік ұшушы күш: біріншіден өзіне тән салмағы, ауырлығы, екіншіден ауаның кедергісі дененің салмағы mg болады, ал ауаның кедергісі оның жылдамдығының квадратына пропорционал, яғни

$$kv^2 = k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Мұнда $m-$ дененің массасы $g = 9{,}81\ \text{м/сек}^2$, $k-$ пропорционалдық коэффициент.

Сонымен, денеге әсер етуші күш

$$F = mg + kv^2 = mg + k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Дене, түзудің бойымен тік жоғары көтеріледі, міне осы түзуді X осі үшін балап алайық та, оның бағытын жоғары қарай мерзейік. Сонда (1.1) дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - kv^2 = -mg - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{1.3}$$

Жоғары тік көтерілуші дененің дифференциалдық теңдеу түріндегі заңы осы. Бұл теңдеудегі белгісіз функция $x(t)$ дененің көтерілу биіктігін көрсетеді.

Сонымен

$$x(t) = \frac{1}{\lambda\mu}\ln(cos\mu t + \lambda v_0 \sin\mu t)$$

тік жоғары көтерілген дененің қозғалыс заңын сипаттайды.

Өз салмағы mg, ауа қарсылығы cv^2 деп ұйғарсақ, бұл қандай материалдық нүкте болуы мүмкін? Мәселен самолеттен жерге қарай жіберетін бомба. Демек (1) дифференциалдық теңдеуді зерттей келе,

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}\left(\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}}$$

шаманы алады. Бұл самолеттен жер бетіне тасталған бомбаның горизонталь жылдамдығы. Бұл қортындылар, дифференциалдық теңдеудің тәжірибеде жиі қолданатынын айқындайды.

Айталық денені қозғалысқа келтіруші күш F уақыт t-ге, қозғалыс күйін анықтайтын x,y координаталарға және олардың

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad , \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Туындыларына тәуелді болсын, яғни $\vec{F} = \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. Осы күштің X осіне түсірілген проекциясы $F_y(t, x, \dot{x}, \dot{y})$ болсын. Мұнда туынды $v_x = \dot{x}$, $v_x = \dot{y}$ дененің жылдамдығы векторының X осі мен Y осіне түсірілген проекцияларын көрсетеді. Екінші ретті туындылар $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ дененің үдеу векторының x осі мен y осіне түсірілген проекцияларын көрсетеді. Ньютонның екінші заңы бойынша, қозғалушы дененің массасы мен үдеуінің көбейтіндісі қозғалушы күшке тең, яғни:

$$\begin{cases} m * \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ m * \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \end{cases}$$

Міне бұл – екінші ретті белгісізі бар дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Мұндағы белгісіздер x пен y.

2 Қозғалыс орнықтылығы

Белгілі бір күштің әсерімен дене (материалдық нүкте) бастапқы өзінің қозғалыс күйінен болмыш ұйытқудың әрекетінен ауытқуы да, ауытқымауы да мүмкін. Басқа сөзбен айтқанда, дене өзінің бастапқы қозғалыс күйінің төңірегінде мүмкін қала беруі немесе одан алыстап кетуі.

Егер дене қозғалыс ағымында болмыш ұйытқудың әсерінен өзінің бастапқы қозғалыс күйінің төңірегінен шықпай қала берсе, онда дене қозғалысы орнықты, ал егер айтылып отырған төңіректен шығып алыстап кетсе, онда дене қозғалысы орнықсыз.

Айталық дененің болмыш ұйытқу әсер етуден бұрынғы жай-күйі x, y – координаталарымен анықталатын болсын. Қозғалушы материалдық нүктенің осы координаталармен анықталатын қозғалысын ұйытқымаған қозғалыс дейді. Ал болмыш ұйытқу әсер еткеннен кейінгі қозғаушы материалдық нүктенің жай-күйі $x+\xi, y+\eta$ координалармен анықталатын болсын. Осы координаталармен анықталатын қозғалысты ұйытқыған қозғалыс дейді. Дәл алғашқы кезде ξ, η ылғи аз болып отырса, онда ұйытқымаған қозғалыстары орнықты дейді.

Егер бұл шамалардың кейбіреулері аса үлкен бола берсе, онда ұйытқымаған қозғалысты орнықсыз дейді.

Дене қозғалысы дифференциалдық теңдеумен сипатталатыны бізге мәлім. Қозғалушы дененің жай-күйін анықтайтын шамалар осы дифференциалдық теңдеудің шешімі. Ендеше дене қозғалысы орнықтылығы мен оны сипаттайтын дифференциалдық теңдеудің шешімі орнықтылығы бір-бірімен пара-пар.

Дифференциалдық теңдеу шешімінің орнықтылығы деген ұғымдарды қалай түсіну керек, енді соған келейік. Айталық материалдық нүктенің қозғалысы келесі

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (2.1)$$

Дифференциалдық теңдеумен сипатталсын. (2.1) теңдеумен бірге бастапқы шарттар да берілсін:

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad (2.2)$$

мұнда $t \leq t < \infty$. (1) дифференциалдық теңдеудің (2.2) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімі біреу ғана болсын деп ұйғарайық.

(2.2) бастапқы шарттар азырақ өзгеретін болсын, яғни келесі бастапқы шарттарды қарайық:

$$x(t_0) = x_0 + \alpha, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 + \beta \quad (2.3)$$

α, β шамалары бастапқы шарттардың «Өзгерулері» деп қараймыз:

(1) дифференциалдық теңдеулердің (2.3) бастапқы шарттармен анықталатын шешімін

$$x(t) = \varphi(t) + \xi(t) \quad (2.4)$$

арқылы белгілейік. Бұл шешімді «Өзгерілген» шешім немесе ұйытқыған қозғалыс дейді. (2.4) теңдіктегі функция $\varphi(t)$ дифференциалдық теңдеудің (2.2) бастапқы шарттарға сәйкес келетін шешімі. Бұл шешімді ұйытқымаған қозғалыс дейді.

Егер алдын ала берілген оң ε саны қандай болсада $\delta > 0$ саны табылып мына

$$|\alpha| < \delta, |\beta| < \delta$$

Теңсіздіктердің орындалуынан келесі теңсіздіктер

$|\xi(t)| < \varepsilon, |\xi'(t)| < \varepsilon$

t −нің мына $t \geq t_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндері үшін орындалса, онда ұйытқымаған $\varphi(t)$ қозғалысты орнықты деп атайды.

Жаңағы тұжырымдалған анықтамадағы шарттардың орындалуымен және келесі шарттар

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \xi'(t) = 0$$

орындалса, онда ұйытқымаған $\varphi(t)$ қозғалысты асимптоталық орнықты деп атайды.

Егер жоғарғы берілген бірінші анықтамадағы шарттар орындалмаса, онда ұйытқымаған $\varphi(t)$ қозғалысты орнықсыз дейді.

Егер $x = 0$ (2.1) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырса, онда оны бұл теңдеудің өзінен-өзі айқын немесе нөлдік шешім дейді. Егер алдын ала берілген $\varepsilon > 0$ саны қандай болса да $\delta > 0$ саны табылып төмендегі теңсіздіктерді

$$|x_0| < \delta, |\dot{x}_0| < \delta$$

қанағаттандыратын бастапқы

$$x_0(t_0) = x_0, \, \dot{x}_0(t_0) = \dot{x}_0$$

Шарттармен анықталатын әрбір $x = x(t)$ шешім $t -$ нің барлық мына $t \geq t_0$ мәндерінде келесі теңсіздіктерді

$|x(t)| < \varepsilon, |\dot{x}(t)| < \varepsilon$

қанағаттандырса, онда (2.1) дифференциалдық теңдеулердің өзінен-өзі айқын $x = 0$ шешімін орнықты деп атайды.

Егер осының алдындағы анықтамадағы барлық шарттар орындалуымен бірге төмендегі шарттар

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \, , \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0$$

орындалса, онда (1) дифференциалдық теңдеудің $x = 0$ нольдік шешімін асимптоталық орнықты деп атайды.

(1) дифференциалдық теңдеудің әрбір $x = x(t)$ шешімінің орнықтылығын зерттеуді оның нольдік шешімі орнықтылығын зерттеуге келтіруге болады.

Келесі

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = f(t) \tag{2.4}$$

біртектес емес сызықты дифференциалдық теңдеуді қарастырайық. Бұл теңдеудің коэффициенттері $p(t), q(t)$ және оң жағы $f(t)$ тұрақты емес, (a, b) аралығында анықталған және осы аралықта үзіліссіз функциялар.

Айталық (4) теңдеуге сәйкесті

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0 \tag{2.5}$$

Біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің бір-біріне тәуелсіз, яғни мына шартты

$$x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = w(t) = 0$$

айнымалы $t-$ нің (a,b) аралығындағы барлық мәндерінде қанағаттандыратын екі шешімі $x_1(t), x_2(t)$ белгілі болсын. Онда (2.5) теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \tag{2.6}$$

мұнда $C_1, C_2 -$ кез-келген тұрақты. Егер біртектес емес (2.4) теңдеудің жалпы шешімін (2.6) теңдік түрінде іздейтін болсақ, онда C_1 және C_2 түрақты болмауға тиіс, айнымалы $t-$нің (a,b) аралығында анықталған функциясы болу керек. Сонымен, (4) теңдеудің шешімін мына түрде

$$u(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \tag{2.7}$$

мұнда $C_1(t), C_2(t)$ табуға жататын функциялар.

Бұдан кейін:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}x_1(t) + \dfrac{dC_2}{dt}x_2(t) = 0, \\ \dfrac{dC_1}{dt}\dot{x}_1(t) + \dfrac{dC_2}{dt}\dot{x}_2(t) = f(t). \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін құрып, оны шешіп, білгісіз $\frac{dC_1}{dt}, \frac{dC_2}{dt}$ $-$ны табамыз.

$$\frac{dC_1}{dt} = -\frac{f(t)x_2(t)}{w(t)}, \frac{dC_2}{dt} = \frac{f(t)x_2(t)}{w(t)} \tag{2.8}$$

Айталық $C_1(t_0) = 0, C_2(t_0) = 0$ болсын десек, (2.8) теңсіздікті интегралдап табамыз:

$$C_1(t) = -\int_{t_0}^{t}\frac{f(s)x_1(s)ds}{w(s)}, C_2(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{f(s)x_2(s)ds}{w(s)}.$$

$C_1(t), C_2(t) -$ нің осы табылған мәндерін (2.7) теңсіздіктің оң жағына қойып бастапқы берілген (2.4) біртектес емес сызықты дифференциалдық теңдеудің шешімін табамыз:

Сонымен (2.4) біртектес емес сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$x(t) = A_1x_1(t) + A_2x_2(t) + \int_{t_0}^{t} G(t,s)f(s)ds \tag{2.9}$$

(2.4) диффренциалдық теңдеудің (2.9) түрдегі шешімін табудағы қолданған тәсілді кез келген тұрақтыларды өзгерту Лагранж тәсілі дейді.

Мысалы үшін келесі теңдеуді қарастырайық:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R^2x = f(t). \tag{2.10}$$

Сәйкесті біртектес сызықты дифференциалдық теңдеудің

$\frac{d^2x}{dt^2} + R^2x = 0$ (2.11)

шешімдерін табайық. Сипаттамалық теңдеуді құрамыз:

$$\lambda^2 + R^2 = 0$$

Бұл теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = iR, \lambda_2 = -iR$. Демек, (2.11) теңдеудің бір-

біріне тәуелсіз шешімдері $x_1(t)=\cos Rt\,, x_2(t)=\sin Rt$ болады. (2.11) теңдеудің жалпы шешімі

$$x(t)=A_1\cos Rt+\sin Rt.$$

мұнда A_1, A_2- кез-келген тұрақтылар.

Енді (2.10) біртектес емес сызықты дифференциалдық теңдеудің шешімін мына түрде

$$u(t)=C_1(t)\cos Rt+C_2(t)\sin Rt \tag{2.12}$$

іздейміз.

Жоғарыда баяндалған тәсілді қолданып табамыз

$$\begin{cases}\cos Rt\dfrac{dC_1}{dt}+\sin Rt\dfrac{dC_2}{dt}=0,\\ -\sin Rt\dfrac{dC_1}{dt}+\cos Rt\dfrac{dC_2}{dt}=\dfrac{1}{R}f(t).\end{cases}$$

Бұдан

$$\frac{dC_1}{dt}=-\frac{1}{R}f(t)\sin Rt\,,\qquad \frac{dC_2}{dt}=\frac{1}{R}f(t)\cos Rt.$$

интегралдау нәтижесінде

$$C_1(t)=\frac{1}{R}\int_{t_0}^{t}f(s)\sin Rs\,ds,$$

$$C_2(t)=\frac{1}{R}\int_{t_0}^{t}f(s)\cos Rs\,ds.$$

$C_1(t), C_2(t)-$нің осы өрнектерін (2.12) теңдіктің оң жағына қоямыз. Сонда

$$u(t)=-\frac{\cos Rt}{R}\int_{t_0}^{t}f(s)\sin Rs\,ds+\frac{\sin Rt}{R}\int_{t_0}^{t}f(s)\cos Rs\,ds$$

немесе

$$u(t)=\frac{1}{R}\int_{t_0}^{t}f(s)[\sin Rt\cos Rs-\cos Rt\sin Rs]ds$$

Сонымен,

$$u(t)=\frac{1}{R}\int_{t_0}^{t}f(s)\sin R\,(t-s)ds \tag{2.13}$$

Берілген (10) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$x(t)=A_1\cos Rt+A_2\sin Rt+\frac{1}{R}\int_{t_0}^{t}f(s)\sin R(t-s)ds \tag{2.14}$$

(2.13) теңдікті t бойынша дифференциалдасақ

$$\frac{du}{dt}=\sin Rt\int_{t_0}^{t}f(s)\sin Rs\,ds+\cos Rt\int_{t_0}^{t}f(s)\cos Rsds \tag{2.15}$$

(2.13), (2.15) формулалардан мынадай қортындыға келеміз:

(2.10) теңдеудің (2.13) формуламен анықталған шешімі келесі

$$u(t_0)=0, \dot{u}(t_0)=0$$

бастапқы шарттарды қанағаттандырады. Сызықты емес екінші ретті келесі дифференциалдық

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{2.16}$$

Теңдеудің шешімін Тейлор немесе Макларен қатарлары түрінде іздеуге тура келеді.

Егер $F(t)$ аргумент t −нің t_0 мәнінде барлық туындылары болатын болса, онда мұндай функцияны Тейлор қатарына жіктеуге болады:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \cdots$$

(2.16) дифференциалдық теңдеудің төмендегі

$$x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \tag{2.17}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін Тейлор қатары түрінде іздеу үшін, оның оң жағында тұрған F функциясының $t_0, x_0, \dot{x}_0$ мәндерінде барлық дербес туындылары болуы керек. Міне солай деп ұйғарып (2.16) теңдеудің (2.17) бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін Тейлор қатары түрінде іздейміз:

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \cdots$$

Енді мәселе осы қатардың коэффициенттерін табуда.

$$x(t_0), \dot{x}(t_0) = \text{белгілі}, \ddot{x}(t_0), \dddot{x}(t_0), \dots$$

Коэффициенттерді берілген (16) теңдеудің өзінен табамыз.

$$\ddot{x}(t_0) = f(t_0, x_0, \dot{x}_0) = a_1(t_0, x_0, \dot{x}_0),$$

$$\dddot{x}(t_0) = \frac{\partial f(t_0, x_0, \dot{x}_0)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_0, x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} \cdot \dot{x}(t_0) + \frac{\partial f(t_0, x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \dot{x}(t_0)$$
$$+ \frac{\partial f(t_0, x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \dot{x}(t_0) = a_2(t_0, x_0, \dot{x}_0)$$

Міне осы жолмен $x'''(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0)$, коэффициенттерді табамыз.

Сөйтіп (2.16) дифференциалдық теңдеудің ізделінді шешімі мына түрде болатын болды:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{a_1(t, x_0, \dot{x}_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}(t, x_0, \dot{x}_0)}{n!}(t - t_0)^n + \cdots$$

Осы құрылған шешімнің (2.17) бастапқы шарттарды қанағаттандыратынына көз жеткізу қиын емес.

3 Қозғалыс орнықтылы мен орнықсыздығының болу шарттары

Айталық денені қозғалысқа келтіруші күш $\vec{F}$ уақыт t −ге, қозғалыс күйін анықтайтын x, y координаталарға және олардың

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

туындыларына тәуелді болсын, яғни

$$\vec{F} = \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

осы күштің x осіне түсірілген проекциясы $F_x(t, x, \dot{x}, \dot{y})$, ал y осіне түсірілген проекциясы $F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ болсын. Мұнда туынды

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}$$

дененің жылдамдық векторының x осі мен y осіне түсірілген проекцияларын көрсетеді. Екінші ретті туындылар

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},$$
$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

дененің үдеу векторының x осі мен y осіне түсірілген проекцияларын көрсетеді. Ньютонның екінші заңы бойынша, қозғалушы дененің массасы мен үдеуінің көбейтіндісі оны қозғалтушы күшке тең, яғни

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \end{cases}$$

Міне бұл – екінші ретті екі білгісізі бар дифференциалдық теңдеулер жүйесі. Мұндағы белгісіздер x пен y.

1. Айталық дененің (материалдық нүктенің) қозғалысы келесі n-ретті

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\,\frac{d^{n-1}x}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = 0 \qquad (3.5)$$

біртектес сызықты дифференциалдық теңдеумен сипатталсын. Бұл теңдеудегі $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ – тұрақты коэффиценттер. (3.5) теңдеудің шешімін көрсеткіштік функция түрінде іздейміз:

$$x(t) = e^{\lambda t} \qquad (3.6)$$

Бұл функцияны n рет дифференциалдап

$$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \lambda^{n-1}e^{\lambda t}, \frac{d^nx}{dt^n} = \lambda^n e^{\lambda t} \qquad (3.7)$$

сонан соң (3.6), (3.7) мәндерді (3.5) теңдеуге қойып, мұның нәтижесінде шыққан теңбе-теңдіктегі ортақ $e^{\lambda t}$ көбейткішке қысқартып λ-ны табу үшін келесі n дәрежелі алгебралық теңдеуге келеміз.

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (3.8)$$

Бұл теңдеуді (3.5) дифференциалдық теңдеудің Сипаттама теңдеуі деп атайды. (3.8) алгебралық теңдеудің n түбірі бар, олар $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(3.5) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \qquad (3.9)$$

болады, мұнда $C_1, C_2, \dots, C_n -$ кез келген тұрақтылар.

Егер (3.8) алгебралық теңдеудің нақты бөлігі теріс түйіндес комплекс - $\alpha \pm i\beta$ түбірлері болса, онда бұл түбірлерге сәйкес келетін шешімдер

$$e^{(-\alpha+i\beta)t}, e^{(-\alpha-i\beta)t}$$

болады және (3.9) жалпы шешімдегі бұл түбірлерге сәйкес келетін қосылғыштар мына түрде болады:

$$C_1 e^{(-\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\beta)t} = Ae^{-\lambda t}\sin(\beta t + \psi),$$

мұнда A мен ψ – жаңа басқа тұрақтылар. Егер $t \to \infty$ онда бұл түбірлерге сәйкес келетін шешімдер нольге ұмтылады.

Егер (3.8) алгебралық теңдеудің түбірлерінің нақты бөлігі оң болса, мәселен $\lambda = \alpha \pm i\beta$, онда бұл түбірге сәйкес келетін шешім t шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылмайды,шексіздікке қарай кетеді.

Егер (3.8) алгебралық теңдеудің барлық түбірлерінің нақты бөліктері теріс болса, онда (3.5) дифференциалдық теңдеумен сипатталатын қозғалыс орнықты болады.

Егер (3.8) сипатталық теңдеудің түбірлерінің оң болмағанда біреуінің нақты бөлігі оң болса, онда (3.5) дифференциалдық теңдеумен сипатталатын қозғалыс орнықсыз болады.

(3.5) дифференциалдық теңдеумен сипатталатын қозғалыстың орнықтылығын немесе орнықсыздығын зерттеу үшін оның сипаттамалық теңдеуін шешіп жатудың қажеті жоқ, тек түбірлерінің нақты бөліктерінің қандай шарттар орындалғанда теріс немесе оң болатынын білу керек.

Бұл жөнінде Гурвицтың шарттарын дәлелдемей-ақ келтіруге болады. Егер n дәрежесі (3.8) алгебралық теңдеудің бірінші коеффициенты $a_0 > 0$ болса, және төмендегі теңсіздіктер

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0 \qquad (3.10)$$

орындалса, онда (3.8) теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктері теріс болады.

(3.10) қатыстардың оң жақтарында тұрған өрнектер (3.8) теңдеудің коеффициенттерінен құрылған анықтауыштар. (3.10) шарттарды Гурвиц критерийі дейді.

Айталық материалды нүктенің қозғалысы келесі дифференциалдық теңдеумен

$$a_0 \frac{d^3x}{dt^3} + a_1 \frac{d^2x}{dt^2} + a_2 \frac{dx}{dt} + a_3 x = 0 \qquad (3.11)$$

сипатталсын. (3.11) дифференциалдық теңдеудің сипаттама (характеристикалық) теңдеуі

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (3.12)$$

Гурвиц критерийі бойынша (3.12) теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктері теріс болу үшін келесі теңсіздіктердің

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0, a_3 > 0$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.

Егер осы шарттар орындалса, (3.11) дифференциалдық теңдеумен сипатталатын қозғалыс орнықты болады.

Айталық өзіміз күнделікті мініп жолаушылайтын самолет бір беткей v_0 жылдамдықпен жатық жазықтық бойымен ұшып бара жатқанда ұйытқушы күш әсер етсін. Осы күштің әсерінен самолет жылдамдығы $v = v_0 + u$ болсын, мұнда u – мына v_0 – мен алыстағанда аз шама. Самолет қозғалысы келесі екі

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x - \frac{1}{\alpha_0}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{\sigma_0}\frac{dy}{dt}, \ \frac{d^2y}{dt^2} = -\sigma(y+x) - \delta\frac{dy}{dt}, \quad (3.13)$$

Дифференциалдық теңдеумен сипатталады. Мұнда x – самолеттің ауырлық центрі жылдамдығы векторы мен горизонталь жызықтық арасындағы бұрышты, ал y – самолеттің бойлық осі мен горизонталь арасындағы бұрышты көрсетеді, ал α_0, σ, δ – тұрақты шамалар.

Егер (3.13) дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін $x = He^{\lambda t}, y = he^{\lambda t}$

түрде іздесек, мұнда H, h - тұрақты шамалар, онда λ – ны табу үшін төмендегі

$$\lambda^4 + \left(\frac{1}{\alpha_0} + \delta\right)\lambda^3 + \left(2 + \frac{\delta}{\alpha_0} + \delta\right)\lambda^2 + 2\delta\lambda + 2\delta = 0 \quad (3.14)$$

характеристикалық (сипаттамалық) теңдеуге келеміз.

Қандай шарт орындалғанда бұл теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктері теріс таңбаға ие болады, енді соны тексерейік. Ол үшін, біріншіден (3.14) төрт дәрежесі характеристикалық теңдеудің коеффициенттері

$$a = \frac{1}{\alpha_0} + \delta, (\alpha_0 \neq 0), b = 2 + \frac{\delta}{\alpha_0} + \sigma \quad (3.15)$$

оң болулары керек, екіншіден

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

теңдеудің барлық түбірлерінің нақты бөліктері теріс болса, онда

$$c^2 - abc + a^2d < 0 \quad (3.16)$$

Демек (3.16) шарт орын бойынша

$$c^2 - abc + ad^2 = 4\delta^2 - \left(\frac{1}{\alpha_0} + \delta\right)\left(2 + \frac{\delta}{\alpha_0} + \sigma\right)2\delta + \left(\frac{1}{\alpha_0} + \delta\right) * 2\delta + \left(\frac{1}{\alpha_0} + \delta\right)^2 \cdot 2\delta$$

Теріс болуы керек, яғни

$$4\delta^2 - \left(\frac{1}{\alpha_0} + \delta\right)\left(4\delta + \frac{2\delta^2}{\alpha_0} - \frac{2\sigma}{\alpha_0}\right) < 0$$

Кейінгі теңсіздікті σ арқылы шешсек, онда

$$\sigma < \delta^2 + \frac{2\delta\alpha_0}{1+\delta\alpha_0} \tag{3.17}$$

Сөйтіп, (3.13) дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын самолет қозғалысы орнықты болу үшін (3.15) (3.17) теңсіздіктері орындалуы керек.

4 Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің орнықтылығы

Айталық, бізде дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\ (i = 1, 2, \dots, n)$ (4.1)

берілсін. Мұндағы $\frac{df_i}{dy_k}(i, R = 1,2, \dots, n)$ әрқашан бар және үзіліссіз болсын.

(4.1)-ң $y = \varphi_i(t)(i = 1, 2, \dots, n)$ шешімі $\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0(i = \overline{1, n})$ бастапқы шартты қанағаттандырсын дейік:

if $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta(\varepsilon)>0}$ и $\left|y_i(t_0) - \varphi_i^0\right| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow\ |y_i(t) - y_i(t)| < \varepsilon$

$i = 1,2, \dots, n,\ t \geq t_0$

орындалса, онда $\varphi_i(t)$ шешімі орнықты дейді.

if $\forall_{\varepsilon>0}|y_i(t) - y_i(t)| < \varepsilon$ орындалса, онда $y = \varphi_i(t)$ шешім орнықсыз деп аталады.

Егер $y = \varphi_i(t)(i = \overline{1, n})$ шешімі орнықты болумен бірге және

$$\lim_{t\to\infty}|y_i(t) - y_i(t)| = 0$$

орындалса, онда $\varphi_i(t)$ асимптотикалық орнықты деп аталады.

Егер $x_i(t) = y_i(t) - y_i(t)$

алмастыру жасасақ:

$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ (4.2)

түрге келтіріледі.

Бұл жағдайда, біз $x_i(t) = 0$ деген нольдік шешімнің орнықтылығын зерттейтін боламыз. Демек $x_i(t)$ шешім орнықты болу үшін:

$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta(\varepsilon)>0}|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |x_i(t)| < \varepsilon(i = 1, 2, \dots, n, t \geq T > t_0)$

орындалу керек.

Мысалы.

1. мына

$\frac{dy}{dt} = kx\ (k = const)$

теңдеуді қарастыралық. Мұнда бастапқы шарт $x = x_0$ болсын. Қандай жағдайда орнықтылық теориясы $t = t_0$ орындалатын зерттейік.

Шешуі:

$\frac{dx}{dt} = kx$ теңдеуінен x-ті табалық:

$$\frac{dx}{x} = kdt \to \int\frac{dx}{x} = k\int dt \quad \frac{dx}{x} = kt \to \ln|x| = kt + \ln c$$

$x = ce^{kt}$ бастапқы шарт бойынша

$$x_0 = ce^{kt_0} \Rightarrow C = \frac{x_0}{e^{kt_0}} = x_0e^{-kt_0}$$

$$x = x_0e^{-kt_0} \cdot e^{kt} = x_0e^{k(t-t_0)}$$

$$x = x_0e^{k(t-t_0)}$$

Егер $k \leq 0$ болса, бұл шешім ($t \geq t_0$ үшін) орнықты болады.

$$\left|x_1 e^{k(t-t_0)} - x_0 e^{k(t-t_0)}\right| = e^{k(t-t_0)}|x_i - x_0| \le |x_i - x_0| < \varepsilon$$
$$|x_i - x_0| < \delta = \varepsilon$$

Егер $k < 0$, онда

$$\lim_{t\to\infty} e^{k(t-t_0)}|x_i - x_0| = 0$$

Демек бұл жағдайда шешім асимптотикалы орнықты. Егер $k = 0 \to x_i \ne x_0$ болғанда $|x_i - x_0| \to 0 \quad t \to +\infty$. Демек шешім орнықты болады, бірақ асимптотикалы орнықтылық орындалмайды. Егер $k > 0$ и $x_i \ne x_0$ болса, онда $\lim\limits_{t\to\infty}|x_i - x_0|e^{k(t-t_0)} = +\infty$

Демек $x_0 = x_0 e^{k(t-t_0)}$ шешімі орнықсыз болады. $x_i(t) = 0$ шешімдерінің қарапайым түрлеріне тоқталамыз. Айталық (x_0, y_0) нүктесінде

$P(x_0, y_0) = 0, Q(x_0, y_0) = 0$ болсын. Сонда (x_0, y_0) нүктесін ерекше нүкте деп атайды.

Мынадай

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{4.1}$$

мұндағы $a_{ij}(i,j = 1,2)$ – тұрақтылар және $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ne 0$. $(0;0)$ нүктесі қысқарған жүйе үшін, қозғалмайтын нүкте немесе ерекше нүкте болсын.

(1) жүйені осы нүктенің айналасында орналасуын қарастырайық:

Айталық (1) жүйенің шешімі:

$$x = \alpha_1 e^{kt}, y = \alpha_2 e^{kt} \tag{4.2}$$

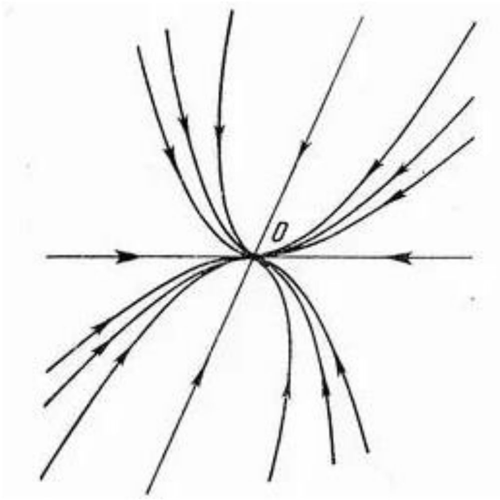
болсын k-ні анықтау үшін, мына

$$\begin{vmatrix} a_{11-k} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22-k} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

характеристикалық (сипаттамалық) теңдеуді аламыз:

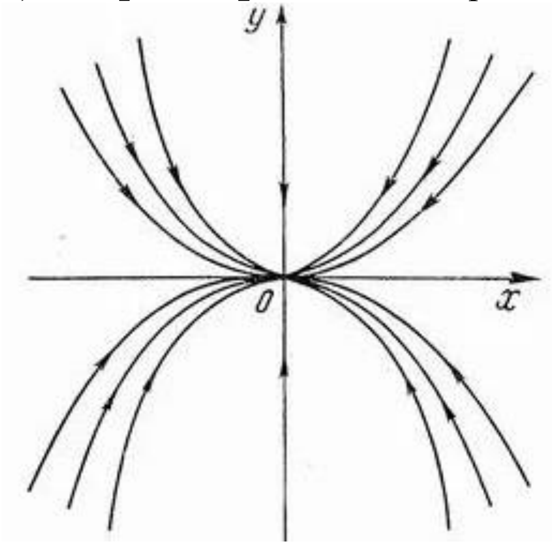
1) Характеристикалық теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі болсын.

Егер $k_1 < 0, k_2 < 0$ болса, онда ерекше нүкте асимптотикалық орнықты болады.



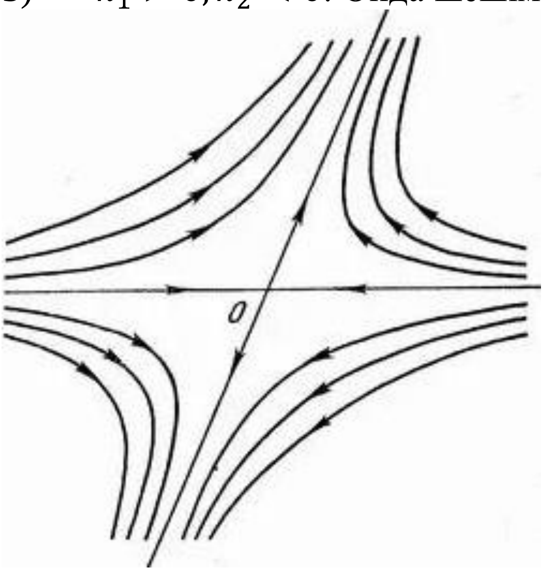
Сурет – 1

2) $k_1 > 0, k_2 > 0$ шешім орнықсыз болады



Сурет – 2

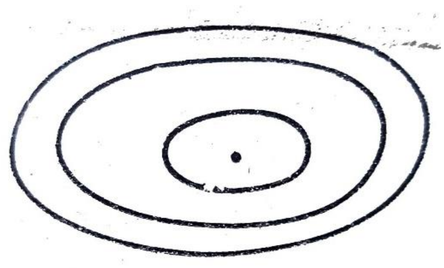
3) $k_1 > 0, k_2 < 0$. Онда шешім орнықсыз болады



Сурет – 3

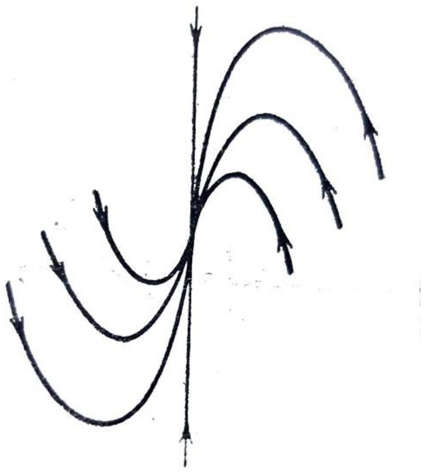
4) Характеристикалық теңдеудің түбірлері түйіндес комплекс сандар $(k_1 = p + iq, k_2 = p - qi)$ мұндағы: $p < 0, q \neq 0$ онда ерекше нүкте асимптотикалық орнықты болады.

$if\ p = 0, q \neq 0$ шешім орнықты.



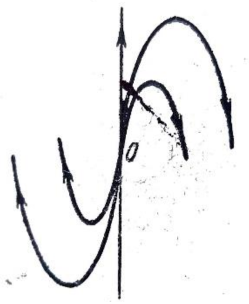
Сурет – 4

$k_1 = k_2 < 0$ асимптотикалық орнықты



Сурет – 5

$k_1 = k_2 > 0 \rightarrow (0,0)$ орнықсыз



Сурет – 6

Сонымен екі түбірінің нақты бөлігінің таңбасы теріс болса, онда (0,0) ерекше нүктеміз асимптотикалық орнықты болады. Егер екі түбірінің ең болмағанда біреуінің нақты бөлігі оң болса онда қозғалыс орнықсыз болады. Бұл қортындылар $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (i = 1,2,\dots,n)$ біртектес, сызықтық, коэффиценттері тұрақты теңдеулер жүйесі үшін де орындалады.

Мына

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases} \tag{4.4}$$

Теңдеулер жүйесі үшін (0; 0) ерекше нүктенің орнықтылығын зерттейік:

Шешуі: (4.4) теңдеуін зерттеу үшін оған сәйкес бірінші жуықтау жүйесін қарайды:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

Сипаттамалық теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

Бұл теңдеудің түбірлері $k_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2}$ теріс.

Бұл жағдайда шешімі $x = 0, y = 0$ асимптотикалы орнықты болады.

Айталық бізге

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \ (i = 1,2, \dots, n) \tag{4.1}$$

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі берілсін. Орнықтылықты зерттеу үшін Ляпунов А.М. теорияларын пайдалану өте маңызды.

Теорема. Егер (4.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін таңбасы оң анықталған v функциясы табылып,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

таңбасы v -ға тең қарама-қарсы немесе $\frac{dv}{dt} \equiv 0$ болса, ерекше нүкте орнықты болады.

Теорема Четаева Н.Г.

Егер теңдеулер жүйесі үшін, V функциясы табылып, қарастырылған облыс шекарасында $V = 0$, облыс ішінде $V > 0, \left(\frac{dv}{dt}\right) > 0$ орындалса, шешім ылғида орнықсыз болады.

Мысалы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y + x)(1 - x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Осы жүйенің ерекше нүктесі $x = 0, y = 0$ үшін орнықтылық жағдайын толық зерттейік:

Шешуі: Айталық $V = x^2 + 2y^2$ болсын.

$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) \ - 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2) = -2(1 - x^2 - 3y^2)(x^2 + 2y^2) \leq 0$

$x \equiv 0, y \equiv 0$ шешім орнықты.

1) $V > 0$ 2) $\frac{dv}{dt} < 0$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$ Айталық $v = x^2 + y^2$

1) $v(x, y) \geq 0, v(0,0) = 0$

2) $\frac{dv}{dt} = 2x \cdot (-5y - 2x^3) + 2y \cdot (5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leq 0$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \leftrightarrow x = 0, y = 0$$

Бұл жағдайда ерекше шешім асимптотикалы орнықты.

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$ $v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$ болсын.

$(v > 0, x > 0, y > 0)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0$$

Қарастырған облыста $V > 0$.

Сондықтан $x \equiv 0, y \equiv 0$ шешімі Четаев Н.Г. б/а орнықсыз.

5 Дифференциалдық теңдеулер жүйесін түрлендіріп оны қарапайым түрге келтіру

Қозғалыстың орнықталық теориясында, қауіпті жағдайда орнықтылық бірінші жуықтау кезінде шешілмеген кезде, оны зерттеу негізгі проблеманың бірі болып табылады.

Қауіпті жағдайда, орнықтылықты зерттеуде, Красовский, Малкин, Молчанов, Персидский, Ятаев М.Я., Плисс В.А. еңбетерін атап өтуге болады.

Қауіпті жағдайда характеристикалық теңдеудің таза жорамал түбірлері бар дифференциалдық теңдеулер қарастырылып онда ішкі резонанс жоқ болған жағдайларды жан-жақты толық зерттеген.

Атап айтқанда, егер зерттейтін теңдеулерді, мына

$$\begin{cases} \frac{dx_s}{dt} = i\lambda_s x_s + X_s(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n), \\ \frac{dy_s}{dt} = -i\lambda_s y_s + Y_s(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n). \end{cases} \quad (S = 1,2, \dots, n) \tag{5.1}$$

түрде қарастырады, мұндағы $x_s y_s$ – түйіндес комплекс айнымалылар, X_s, Y_s – аналитикалық функция. Бұл функцияларды қатарға жіктелгенде, мүшелері екінші реттен кем емес болады. Мұндағы оң сан λ_n мынадай шартты

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\lambda_s \neq 0, \quad \sum_{s=1}^{n}|m_s| \leq \mathcal{L} \tag{5.2}$$

қанағаттандырады.

мұндағы m_s – бүтін сан, $\mathcal{L}$ - өте үлкен сан. Кейінгі 21 – ғасырда (5.1) теңдеулер жүйесін (5.2) шарт орындалмаған жағдайда зерттеу маңызды орын алуда, себебі табиғатта кездесетін қозғалыстар үшін (5.2) шарт орындалмай жатады.

Анықтама (1) жүйе m – ретті ішкі резонанс, түрі $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ болу үшін

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\lambda_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{n}|m_s| = m \tag{5.3}$$

шарт орындалуы керек

$|m_s|$ – өзара жай бүтін сан.

Бұл (5.3) шарт орындалғанда, зерттелетін дифференциалдық жүйе үшін λ_s арасында оның шешімінің орнықтылығына үлкен әсері болады. Сондықтан (5.1) жүйені толық зерттеу кезінде (5.3) шарттың орындалуы өте қажет болады.

(1) жүйенің орнықтылығын (5.3) шарт орындалғанда оны толық зерттеген Нұрпеисов С.А. [1], [4]. (5.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесіне

$$\begin{aligned} x_s &= u_s + \sum_{j=2}^{2N+1} U_s^{(j)}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n), \\ y_s &= v_s + \sum_{j=2}^{2N+1} V_s^{(j)}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n), \end{aligned} \tag{5.4}$$

алмастыру жасалық, мұндағы u_s, v_s – түйіндес комплекс айнымалылар. $U_s^{(j)}, V_s^{(j)}$ – j – ретті формалар, N – өте үлкен сан.

Осындай түрлендіру кезінде, резонансты мүшелердің кіру тәртібін толық түсінеміз, яғни (5.1) жүйеге кіретін $u_1^{k_1} v_1^{l_1} u_2^{k_2} v_2^{l_2} \dots u_n^{k_n} v_n^{l_n}$ мүше үшін оның дәрежесі $\Delta = \sum_{\sigma=1}^{n}(k_i - l_i)\lambda_\sigma - \lambda_s = 0$ болу жағдайы резонансты мүшенің кіруін анықтайды, ал қалған мүшелері резонансты бола алмайды.

Δ өрнегіне талдау жасай отырып, резонанстың екі түрін анықтаймыз: ішкі резонанс және теңбе-тең резонанс. S – теңдеудегі теңбе-тең резонанс

$$u_s \prod_{\sigma=1}^{n}(u_\sigma v_\sigma)^{p_\sigma}, p_\sigma \geq 0 \leq \text{целые}. \tag{5.5}$$

S – теңдеудегі (5.3) резонансқа сәйкес келетін мүше былай болады:

$$u_s \prod_{\sigma=1}^{n} u_\sigma^{l_\sigma + \varkappa m_\sigma} v_\sigma^{l_\sigma}, \tag{5.6}$$

мұндағы $\varkappa$ нөлден өзгеше бүтін сан. $\varkappa \neq 0$

[1],[4] жұмыста (5.1) жүйе (5.4) алмастыру арқылы мүшелері $m-1-$ реттен басталатын мынадай

$$\begin{cases} \frac{du_s}{dt} = i\lambda_s u_s + \alpha_s^{(m_j)} v_1^{m_1} \dots v_s^{m_s-1} \dots v_h^{m_n} u_{h+1}^{|m_{n+1}|} \dots u_n^{|m_n|} + \varphi_s(u_1, \dots, u_n, v_n) \\ \frac{dv_s}{dt} = -i\lambda_s v_s + \bar{\alpha}_s^{(m_j)} u_1^{m_1} \dots u_s^{m_s-1} \dots u_h^{m_n} v_{h+1}^{|m_{n+1}|} \dots v_n^{|m_n|} + \psi_s(u_1, \dots, u_n, v_n) \\ \frac{du_s}{dt} = i\lambda_s u_s + \alpha_s^{(m_j)} u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n} v_{n+1}^{|m_{n+1}|} \dots v_s^{|m_s|-1} \dots v_n^{|m_n|} + \varphi_s(u_1, \dots, u_n, v_n) \\ \frac{du_s}{dt} = -i\lambda_s v_s + \bar{\alpha}_s^{(m_j)} v_1^{m_1} \dots v_n^{m_n} u_{n+1}^{|m_{n+1}|} \dots u_s^{|m_s|-1} \dots u_n^{|m_n|} + \psi_s(u_1, \dots, u_n, v_n) \end{cases} \tag{5.7}$$

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесіне ауысады. Мұндағы $\varphi_s, \psi_s -$ аналитикалық функция, бұл қатарға жіктегенде мүшесі m – реттен басталады, $u_s, v_s -$ түйіндес комплекс айнымалылар.

(5.7) жүйеден

$$u_s = r_s e^{i\theta_s}, v_s = r_s e^{-i\theta_s}$$

алмастыру арқылы жаңа жүйеге көшеміз:

$$\begin{cases} \frac{d(r_s^2)}{dt} = 2p_s(\theta) \prod_{j=1}^{n} r_j^{|m_j|} + R_s(r_1, \dots, r_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \\ \frac{d\theta}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{|m_s|}{r_s^2} P_s(\theta) \prod_{j=1}^{n} r_j^{|m_j|} + \Phi_s(r_1, \dots, r_n, \theta_1, \dots, \theta_n), \end{cases} \tag{5.8}$$

$$P_s(\theta) = a_s^{(m_j)} \cos\theta + \beta_s^{(m_j)} \sin\theta,$$

$$a_s^{(m_j)} + ib_s^{(m_j)} = \alpha_s^{(m_j)}, \theta = m_1\theta_1 + \dots + m_n\theta_n$$

$$\beta_s^{(m_j)} = \begin{cases} b_s^{(m_j)}, \text{егер } s \leq h, \\ -b_s^{(m_j)}, \text{егер } s > h. \end{cases}$$

$R_s, \Phi_s -$ голоморфты функциялар:

$$R_s \sim O(r^{m+1}), \Phi \sim O(r^{m-1})$$

6 САТЖ-нің оң шешімін табу туралы теорема

Бізге сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases}\sum_{s=1}^{n} a_s^{(m_j)}\mu_s = 0,\\ \sum_{s=1}^{n} \beta_s^{(m_j)}\mu_s = 0.\end{cases} \tag{6.1}$$

мына

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{(m_\sigma)} \ldots a_n^{(m_\sigma)} \\ \beta_1^{(m_\sigma)} \ldots \beta_n^{(m_\sigma)} \end{pmatrix},$$

Матрицасын және оның анықтауышы $\Delta_{s_1 s_2}, \Delta_{s_2 s_3}, \Delta_{s_1 s_3}$ қарастырайық.

Матрицаның барлық мүмкіндігін ескеріп, $A_{s_1 s_2 s_3}$ матрицасын құрастыралық:

$$A_{s_1 s_2 s_3} = \begin{pmatrix} a_{s_1}^{(m_\sigma)} a_{s_2}^{(m_\sigma)} a_{s_3}^{(m_\sigma)} \\ \beta_{s_1}^{(m_\sigma)} \beta_{s_2}^{(m_\sigma)} \beta_{s_3}^{(m_\sigma)} \end{pmatrix}, (s_1 < s_2 < s_3).$$

$$\beta_s^{(m_s)} = \begin{cases} b_s^{(m_\sigma)} \text{ егер } s \le h, \\ -b_s^{(m_\sigma)} \text{ егер } s > h. \end{cases}$$

$$\Delta_{s_1 s_\sigma} = \begin{vmatrix} a_{s_1}^{(m_\sigma)} & a_{s_\delta}^{(m_\delta)} \\ \beta_{s_i}^{(m_\sigma)} & \beta_{s_\sigma}^{(m_\sigma)} \end{vmatrix} \ (s_i < s_\sigma).$$

Егер $A_{s_1 s_2 s_3}$ матрицасының арасынан $\Delta_{s_1 s_2}, \Delta_{s_2 s_3}, \Delta_{s_1 s_3}$ анықтауыштарды тапқанда мынадай

$$\begin{aligned} &sign\Delta_{s_1 s_2} = sign\Delta_{s_2 s_3} = -sign\Delta_{s_1 s_3} \\ &sign\Delta_{s_1 s_2} = -sign\Delta_{s_2 s_3} = sign\Delta_{s_1 s_3} \\ &-sign\Delta_{s_1 s_2} = sign\Delta_{s_2 s_3} = sign\Delta_{s_1 s_3} \end{aligned} \tag{6.2}$$

(яғни $\Delta_{s_1 s_2}, \Delta_{s_2 s_3}, \Delta_{s_1 s_3}$- сандарынан таңба өзгерісі болса), онда (6.1) жүйені тек қана оң шешімі $\mu_s > 0$ табылады немесе

Теорема (6.1) САТЖ-ң оң шешімі ($\mu_s > 0$) болу үшін (6.2) шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу (6.1) САТЖ-ы былай жазалық:

$$a_{s_i}^{(m_\sigma)}\mu_{s_1} + a_{s_2}^{(m_\sigma)}\mu_{s_2} + a_{s_3}^{(m_\sigma)} = -\sum_{s=1}^{n} a_s^{(m_\sigma)}\mu_s = F_1, s \ne s_1, s_2, s_3$$

$$\beta_{s_1}^{(m_\sigma)}\mu_{s_1} + \beta_{s_2}^{(m_\sigma)}\mu_{s_2} + \beta_{s_3}^{(m_\sigma)}\mu_{s_3} = -\sum_{s=1}^{n} \beta_s^{(m_\sigma)}\mu_s = F_2 . s \ne s_1, s_2, s_3$$

Айталық $\mu_s = \mu_s^*, F_1(a_s, \mu_s^*) = \varepsilon_1$ – шексіз аз шама

$F_2(a_s, \mu_s^*) = \varepsilon_2$ – шексіз аз шама.

$$(F_1 \equiv F_2 = 0)$$

Айталық $\Delta_{s_1 s_2}$ және $\Delta_{s_2 s_3}$ таңбасы бірдей болсын. Бұл жағдайда $\mu_s = \mu_s^* =$

1 десек (6.2) – ден екі белгісізі бар біртекті емес екі теңдеу аламыз:

$$\begin{cases} a_{s_i}^{(m_\sigma)}\mu_{s_1} + a_{s_2}^{(m_\sigma)}\mu_{s_2} = \varepsilon_1 - a_{s_3}, \\ \beta_{s_1}^{(m_\sigma)}\mu_{s_1} + \beta_{s_2}^{(m_\sigma)}\mu_{s_2} = \varepsilon_2 - \beta_{s_3}. \end{cases}$$

$$\mu_{s_1} = \mu_{s_1}^* \equiv -\frac{\Delta_{s_2 s_3} - \Delta_{s_2 \varepsilon}}{\Delta_{s_1 s_2}}, \mu_{s_2} = \mu_{s_2}^* = -\frac{\Delta_{s_2 s_3} - \Delta_{s_1 \varepsilon}}{\Delta_{s_1 s_2}}, \Delta_{s_\sigma \varepsilon} = \begin{vmatrix} a_{s_\sigma} & -\varepsilon_1 \\ \beta_{s_\sigma} & -\varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

мұндағы ε_1 және ε_2 – шексіз аз шамалар.

Демек

$$sign\mu_{s_1}^* = -sign\frac{\Delta_{s_2 s_3}}{\Delta_{s_1 s_2}}$$

және

$$sign\mu_{s_2}^* = -sign\frac{\Delta_{s_1 s_3}}{\Delta_{s_1 s_2}}$$

$\Delta_{s_1 s_3}$ және $\Delta_{s_2 s_3}$ бірдей таңбада болғандықтан (6.2) шартын ескерсек

$$sign\mu_s^* = sign\mu_s^* = +1$$

Сонымен барлық $\mu_{s_1}^*, \mu_{s_2}^*, \dots, \mu_{s_n}^*$ оң сан болып шығады.

Осы сиақты $\Delta_{s_1 s_2}, \Delta_{s_2 s_3}$ немесе $\Delta_{s_1 s_2}, \Delta_{s_1 s_3}$ бірдей таңбада болса, онда $\mu_{s_2}^* = 1$ немесе $\mu_{s_1}^* = 1$, деп ұйғарсақ жеткілікті.

Мына

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің оң шешімі болу үшін қандай шарттар орындалатынын компьютерде модельдеу жолымен зерттеу жүргізейік. Берілген сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің тек қана оң шешімі болу үшін қажетті шарттарды тексеру үшін Python кодын келесі түрде жаза аламыз:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Берілген теңдеулер жүйесі үшін коэффициенттер
a11, a12, a13 = 1, -2, 1  # Мысал ретінде алынған мәндер
a21, a22, a23 = 2, 1, -3  # Мысал ретінде алынған мәндер
# Матрица A және векторы b
A = np.array([[a11, a12, a13],
              [a21, a22, a23]])
b = np.array([0, 0])
# Теңдеулер жүйесін шешу
x = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)[0]
# Шешім тек оң мәндерден тұру шартын тексеру
all_positive = np.all(x > 0)
# Нәтижені көрсету
if all_positive:
    print("Шешім тек оң мәндерден тұрады:", x)
else:
    print("Шешім оң мәндерден тұрмайды немесе бірден көп шешім бар.", x)
# График салу үшін теңдеулерді қайта құру
def plane1(x1, x2):
    return -(a11 * x1 + a12 * x2) / a13
def plane2(x1, x2):
```

```
    return -(a21 * x1 + a22 * x2) / a23
# x1 және x2 мәндерінің ауқымы
x1_vals = np.linspace(-10, 10, 400)
x2_vals = np.linspace(-10, 10, 400)
x1, x2 = np.meshgrid(x1_vals, x2_vals)
# График салу
plt.figure(figsize=(10, 7))
plt.contour(x1, x2, plane1(x1, x2), [0], colors='r', label='a11*x1 + a12*x2 +
a13*x3 = 0')
plt.contour(x1, x2, plane2(x1, x2), [0], colors='b', label='a21*x1 + a22*x2 +
a23*x3 = 0')
# Графикте шешім нүктесін көрсету
if all_positive:
    plt.scatter(x[0], x[1], color='g', label='Solution (Positive)')
else:
    plt.scatter(x[0], x[1], color='r', label='Solution (Not Positive)')
plt.xlabel('x1')
plt.ylabel('x2')
plt.title('Теңдеулер жүйесінің графигі')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

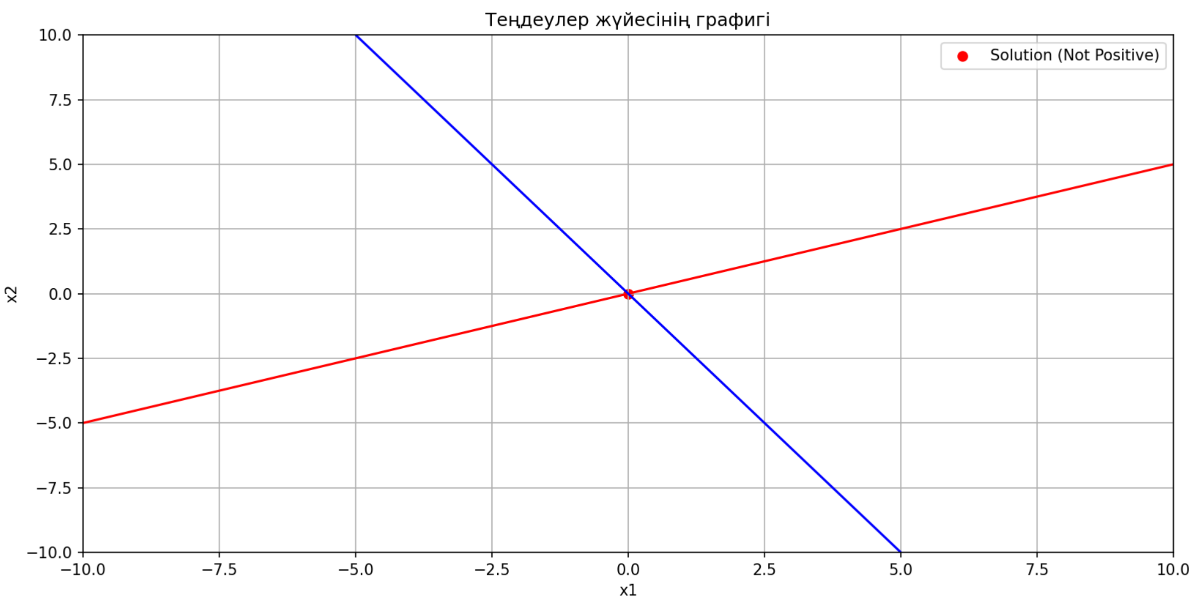
бұл кодта теңдеулер жүйесінің матрицасы A және нәтижелік векторы b анықталады. Кейін

```
np.linalg.lstsq
```

функциясы арқылы теңдеулер жүйесі шешіледі және шешімі тек оң мәндерден тұратынын тексеру үшін

```
np.all
```

функциясы қолданылады. Кодты орындау үшін a_{ij} коэффициенттерінің нақты мәндерін қою керек. Бұл шарттарды орындау үшін матрицаның әр элементтері оң мәнді болуы қажет матрицаның анықтауышы нөлге тең болмауы керек.



Сурет – 7

Шешім оң мәндерден тұрмайды немесе бірден көп шешім бар. [0. 0. 0.]

Берілген теңдеулер жүйесінің графигін салу нәтижесінде шешім оң мәндерден тұрмайтыны анықталды. Графикте екі теңдеудің x_1 және x_2 осьтері бойынша сызықтары көрсетілген.

Кодта қолданылған коэффициенттер мәндері мысал ретінде алынған, сондықтан нақты жағдайға сәйкес мәндерді қою қажет. Мысалы, коэффициенттерді өзгертсек, нәтижелер мен график басқа болуы мүмкін.

7 Ішкі резонанс кезіндегі $(\mathbf{2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \lambda_1 = 2\lambda_2})$ қозғалыстың орнықтылығын зерттеу

Мынадай

$$\frac{d_{x_s}}{dt} = \sum_{j=1}^{6} a_{s_j} x_j + X_s(x_1, \dots, x_6)(s = 1,2, \dots, 6) \tag{7.1}$$

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастыралық.

Бұл жүйенің характеристикалық (сипаттама) теңдеуінің бірінші жуықтауы 3 жұпты әртүрлі таза жорамал түбірлері $\pm i\lambda_s (s = 1,2,3)$,

$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \tag{7.2}$$

Шартты қанағанттандырсын.

Демек (7.1) жүйе үшін ішкі резонанс бесінші ретті болсын.

Айталық $x_s(x_1, \dots, x_n)$ функциясы қатарға жіктегенде төртінші дәрежелі мүшеден басталсын. [1],[2],[4] жұмыстарының нәтижесі бойынша (7.1) жүйе әрқашан мынадай

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i\lambda_1 u_1 + l_1 u_3 v_1 u_2^2 + \cdots, \\ \frac{dv_1}{dt} = -i\lambda_1 v_1 + \overline{l_1} v_3 u_1 v_2^2 + \cdots, \\ \frac{du_2}{dt} = i\lambda_2 u_2 + l_2 v_2 v_3 u_1^2 + \cdots, \\ \frac{dv_2}{dt} = -i\lambda_2 v_2 + \overline{l_2} u_2 u_0 v_1^2 + \cdots, \\ \frac{du_3}{dt} = i\lambda_3 u_3 + l_3 u_1^2 v_2^2 + \cdots, \\ \frac{dv_3}{dt} = -i\lambda_3 v_3 + \overline{l_3} u_2^2 v_1^2 + \cdots, \end{cases} \tag{7.3}$$

мұндағы $u_s = \overline{v_s}$ (7.3) жүйеден

$$u_s = r_s e^{i\theta_s}$$
$$v_s = r_s e^{-i\theta_s}$$

айнымалыларына көшсек:

$$\frac{d(r_1^2)}{dt} = 2r_1^2 r_2^2 r_3 P_1(\theta) + R_1(r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3),$$
$$\frac{d(r_2^2)}{dt} = 2r_1^2 r_2^2 r_3 P_2(\theta) + R_2(r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$$
$$\frac{d(r_3^2)}{dt} = 2r_1^2 r_2^2 r_3 P_3(\theta) + R_3(r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = r_1^2 r_2^2 r_3 \left(2\frac{Q_1(\theta)}{r_1^2} + 2\frac{Q_2(\theta)}{r_2^2} + \frac{Q_3(\theta)}{r_3^2}\right) + \Phi(r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

мұндағы:

$$P_1(\theta) = a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta$$
$$P_2(\theta) = a_2 \cos\theta - b_2 \sin\theta$$
$$P_3(\theta) = a_3 \cos\theta - b_3 \sin\theta$$

$a_s = Pel_s \; b_s = Iml_s \; (s = 1,2,3)$

$$\theta_s = \frac{dP_s}{d\theta}, \theta = 2\theta_1 - 2\theta_2 - \theta_3$$

R_s, Φ – аналитикалық функциялар, бұлар θ_s коэффициенттері бойынша периодты функция болады

Сондықтан

$$R_s \sim O(r^6), \Phi \sim O(r^4)$$

Мынадай

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -b_2 & -b_3 \end{pmatrix}$$

матрица қарастыралық. Бұлардың сәйкес анықтауышы

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}$$

болсын.

[1] – дегі Нұрпеисовтің қортынды теоремаларын ескерсек а), б), в), г) шарттары орындалғанда нөлдік шешімі орнықсыз болады.

а) A матрицасының рангісі 2-ге тең, ал $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ және $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ сандарында таңба өзгерісі жоқ.

б) A матрицасының рангісі 2-ге тең, ал l_1, l_2, l_3 сандарының тек ғана екеуі нөлден өзгеше болуы.

в) A матрицасының рангісі 1-ге тең, ал l_1, l_2, l_3 сандарының ішінде тек екеуі нөлден өзгеше болса, және ($l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$)

$$sign(a_1, a_2) = 1 \text{ (немесе } sign(b_1, b_2) = 1)$$

г) A матрицасының рангісі 1-ге тең, ал l_1, l_2, l_3 сандарының ішінде тек біреуі нөлден өзгеше жағдай болса.

Осы жағдайларда (7.3) жүйесі 4-жуықтау арқылы орнықсыздық сәуле (луч) анықтайды. Демек $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ болса, орнықсыздық шешім былай табылады.

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{3P_2(1-t)} \cdot \sqrt{\frac{P_1}{P_3}}},$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{3P_1(1-t)} \cdot \sqrt{\frac{P_2}{P_3}}},$$

$$r_3 = \sqrt[3]{\frac{P_3}{3P_1P_2(1-t)}},$$

$$\theta = \theta_0$$

мұндағы θ_0 мына

$2\mathrm{ctg}(\theta - \psi_1) + 2\mathrm{ctg}(\theta - \psi_2) + \mathrm{ctg}(\theta - \psi_3) = 0$

$$p_s(\theta) = \Delta_s \sin(\theta - \psi_s)$$

$$0 < \theta_0 - \psi_s < \pi, \Delta_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}, (s = 1,2,3)$$

теңдеудің түбірі.

(7.4) жүйесінің нөлдік шешімі орнықсыз екенін Четаев функциясын табу арқылы дәлелдеуге болады.

а) және б) шарттары орындалғанда Четаев функциясын

$$V_1 = r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3 \cos(\theta - \psi_1).$$

түрде, ал в), г) шарттары үшін

$$V_1 = r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3 \cos\theta,$$

түрде табамыз. Әрине бұл жағдайда a_1, a_2, a_3 мәндерінің ішінде нөлден өзгеше сандары табылса. Егер b_1, b_2, b_3 сандарының ішінде нөлден өзгеше сандар табылса, онда

$$V_1 = r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3 \sin\theta$$

іздейміз. Осы функциялардан $\left(\frac{dv_i}{dt}\right)$ (7.4) туындысын тапсақ:

$$\frac{dv_1}{dt} = [2r_3^2\Delta_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + \Delta_3 r_2^2 \sin(\psi_1 - \psi_3)]r_1^4 r_2^2 + O(r^9),$$

$$\frac{dv_2}{dt} = [2a_1 r_2^2 r_3^2 + 2a_2 r_1^2 r_3^2 + a_3 r_1^2 r_2^2]r_1^2 r_2^2 + O(r^9),$$

$$\frac{dv_3}{dt} = [2b_1 r_3^2 r_2^2 + 2b_2 r_1^2 r_3^2 + b_3 r_1^2 r_2^2]r_1^2 r_2^2 + O(r^9).$$

$$\Delta_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$$

$$0 < \psi_1 - \psi_j < \pi, (j = 2,3)$$

(7.4) жүйенің 4 – жуықтау кезіндегі шешімінің орнықсыздығын Четаев функциясын құрастыру арқылы дәлелдейік.

Егер а), б), в), г) шарттары орындалмаса, онда (7.3) жүйенің нөлдік шешімі 4 – жуықтауда орнықты болады. Бұл жағдайда таңбасы оң анықталған интеграл мына

$$V = \mu_1(u_1 v_1) + \mu_2(u_2 v_2) + \mu_3(u_3 v_3) = const \tag{7.5}$$

түрде анықталады.

Егер жүйе (7.3) 4 – жуықтау кезінде орнықты болса, онда орнықтылықты дәлелдеу үшін, 4 – реттен жоғарғы мүшені табу өте қажет, шынында да

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= i\lambda_1 u_1 + l_1 u_2^2 u_3 v_1 + \alpha_1 u_1^3 v_1^2,\\
\frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda_2 v_1 + \overline{l_1} v_2^2 u_1 v_3 + \overline{\alpha_1} v_1^3 u_1^2,\\
\frac{du_2}{dt} &= i\lambda_2 u_2 + l_2 u_1^2 v_2 v_3 + \alpha_2 u_2^3 v_2^2,\\
\frac{dv_2}{dt} &= -i\lambda_2 v_2 + \overline{l_2} v_1^2 u_2 u_3 + \overline{\alpha_2} v_2^3 u_2^2,\\
\frac{du_3}{dt} &= i\lambda_3 u_3 + l_3 u_1^2 v_2^2 + \alpha_3 u_3^3 v_2^2,\\
\frac{dv_3}{dt} &= -i\lambda_3 v_3 + \overline{l_3} v_1^2 u_2^2 + \overline{\alpha_3} v_3^3 u_2^2.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

(7.5) туынды мына

$$\frac{dv}{dt} = 2\mu, Re\alpha_1(u_1 v_1)^3 + 2\mu_2 Re\alpha_2(u_2 v_2)^3 + 2\mu_3 Re\alpha_3(u_3 v_2)^3$$

түрде табылады.

Егер $Re\alpha_s < 0$ $(s = 1,2,3)$, онда нөлдік шешім қозғалыс $(u_s = v_s(s = 1,2,3))$ асимптотикалы орнықты болады.

Егер $Re\alpha_s > 0$ болса, онда қозғалыс $u_s = v_s = 0$ орнықсыз болады. Сондай-ақ $Re\alpha_s = 0$ болса, қозғалыс орнықты болады. Мысалы: (7.2) Айталық $n = 2, \lambda_1 = 2\lambda_2$ болсын. Бұл жағдайда зерттейтін дифференциалдық теңдеулер жүйесін мына түрде жазамыз:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i\lambda_1 u_1 + \alpha^{(0200)} u_2^2 + u_1(u_1, v_1, u_2, v_2), \\ \frac{dv_1}{dt} = -i\lambda_1 v_1 + \bar{\alpha}^{(0200)} v_2^2 + \overline{u_1}(u_1, v_1, u_2, v_2), \\ \frac{du_2}{dt} = i\lambda_2 u_2 + \alpha^{(1001)} u_1 v_2 + u_2(u_1, v_1, u_2, v_2), \\ \frac{dv_2}{dt} = -i\lambda_2 v_2 + \bar{\alpha}^{(1001)} u_2 v_1 + \overline{u_2}(u_1, v_1, u_2, v_2). \end{cases} \tag{7.7}$$

мұндағы $u_s, \overline{u_s}$ $(s = 1,2)$ функциялар қатарға жіктегенде, әрбір мүшесі 3 – ретті болып енеді.

$$u_s = \bar{v_s} \ (s = 1,2).$$

(7.7) жүйені r_s, θ_s айнымалылары үшін мына

$$\frac{d(r_1^2)}{dt} = r_1^2 r_2^2 P_1(\theta) + \cdots$$

$$\frac{d(r_2^2)}{dt} = r_1^2 r_1^2 P_2(\theta) + \cdots \tag{7.8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{Q_1(\theta)}{r_1^2} + 2\frac{Q_2(\theta)}{r_2^2}\right) r_1^2 r_2^2 + \cdots$$

түрде жазылады. Мұндағы

$$P_1(\theta) = \alpha^{(0200)} \cos\theta + b^{(0200)} \sin\theta, \theta_s = \frac{dP_s}{d\theta} \ (s = 1,2)$$

$$P_2(\theta) = \alpha^{(1001)} \cos\theta + b^{(1001)} \sin\theta, \theta = \theta_1 - 2\theta_2$$

$$\alpha^{(0200)} = Re\alpha^{(0200)}$$

$$\alpha^{(1001)} = Re\alpha^{(1001)}$$

$$b^{(0200)} = Im\alpha^{(0200)}, b^{(1001)} = Im\alpha^{(1001)}$$

Мынадай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^{(0200)} & \alpha^{(1001)} \\ b^{(0200)} & b^{(1001)} \end{pmatrix}$$

матрица қаралық:

Егер б), в), г) шарттары орындалса, онда (7.7) дифференциалдық жүйенің нөлдік шешімі орнықсыз болады. Мұндағы

б) A матрицасының рангісі 2-ге тең және $\alpha^{(1001)}, \alpha^{(0200)}$ нөлден өзгеше болсын.

в) A матрицасының рангісі бірге тең, ал $\alpha^{(1001)} \neq 0, \alpha^{(0200)} \neq 0$ сонымен бірге $sign\left(\alpha^{(0200)}\alpha^{(1001)}\right) = 1$ немесе $sing\left(b^{(0200)}b^{(1001)}\right) = 1$

г) A матрицасының рангісі бірге тең, және тек ғана бір сан нөлден өзгеше болсын. Осы барлық жағдай үшін (7.7) жүйенің орнықсыздық шешімі II жуықтауда табылады. Егер $\alpha^{(0200)} \neq 0, \alpha^{(1001)} \neq 0$ болса, онда орнықсыздықты анықтайтын шешім:

$$r_1 = \frac{1}{P_2} \cdot \frac{1}{1-t},$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{P_1 P_2}} \cdot \frac{1}{1-t},$$

мұндағы $\theta = \theta_0$

$P_5(\theta) = \Delta_s \sin(\theta - \psi_s), \;\; 0 < \theta_0 - \psi_s < \pi \; (s = 1{,}2).$

θ_0 дегеніміз ctg($\theta - \psi_1$)+ 2ctg($\theta - \psi_2$)=0

теңдеудің түбірі болады.

II – жуықтаудағы жүйенің шешімінің орнықсыздығын дәлелдеу үшін Четаев функциясын құрастырамыз:

б) жағдайы бойынша

$$V_1 = r_1 r_2^2 \cos(\theta - \psi_1)$$

в) және г) жағдайында

$$V_2 = r_1 r_2^2 \cos\theta \text{, әрине } \alpha^{(1001)} \neq 0, \alpha^{(0200)} \neq 0$$

немесе

$V_3 = r_1 r_2^2 \sin\theta$, егерде

$$b^{(1001)} \neq 0, \text{және } \; b^{(0200)} \neq 0.$$

Сондықтан

$$\frac{dv}{dt} = \left[\frac{dv}{dt}\right] + O(e^s),$$

мұндағы

$$\left[\frac{dv}{dt}\right] = \begin{cases} 2\Delta_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) r_1^2 r_2^2 \text{ егер } v = v_1, \\ r_2^2\left(a^{(0200)} r_2^2 + 2a^{(1001)} r_1^2\right) \text{ егер } v = v_{2,} \\ r_2^2\left(b^{(0200)} r_2^2 + 2b^{(1001)} r_1^2\right) \text{ егер } v = v_{3,} \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \left[\left(a^{(0200)}\right)^2 + \left(b^{(0200)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, 0 < \psi_1 - \psi_2 < \pi.$$

2-ретті жуықтау кезінде орнықтылық болу үшін A матрицасының рангісі 1 – ге тең болуы және

$$sign\left(a^{(0200)} \cdot a^{(1001)}\right) = -1.$$

Бұл жағдайда қарастырылған дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$V = \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 \tag{7.9}$$

интегралы табылады.

Егер (7.7) жүйе II – ретті жуықтауда орнықты болса, онда орнықтылық есептерін шешу үшін, II – реттен жоғары мүшелерін қарастыру өте қажет.

Шынында,

$$\frac{du_1}{dt} = i\lambda_1 u_1 + \alpha^{(0200)} u_2^2 + \alpha^{(2010)} u_1^2 v_1,$$
$$\frac{dv_1}{dt} = -i\lambda_1 v_1 + \bar{\alpha}^{(0200)} v_2^2 + \bar{\alpha}^{(2010)} v_1^2 u_1,$$
$$\frac{du_2}{dt} = i\lambda_2 u_2 + \alpha^{(1001)} u_1 v_2 + \alpha^{(0201)} u_2^2 v_2,$$
$$\frac{dv_2}{dt} = -i\lambda_2 v_2 + \bar{\alpha}^{(1001)} v_1 u_2 + \bar{\alpha}^{(0201)} v_2^2 u_2. \qquad (7.10)$$

(7.9) – дың туындысы былай

$$\frac{dv}{dt} = 2\mu_1 Re\alpha^{(2001)} (u_1 v_1)^2 + 2\mu_2 Re\alpha^{(0201)} (u_2 v_2)^2.$$

өрнектеледі.

Айталық $Re\alpha^{(2010)} < 0, Re\alpha^{(0201)} < 0$ болса, онда нөлдік шешім асимптотикалық болады. Ал, егер $Re\alpha^{(2010)} > 0, Re\alpha^{(0201)} > 0$ болса, онда шешім орнықсыз болады.

Егер $Re\alpha^{(2010)} = 0$ және $Re\alpha^{(0201)} = 0$ болса, (7.10) жүйенің нөлдік шешімі орнықты болады.

(7.7) жүйе [7] жұмысында орнықтылыққа зерттелген, бірақ бұл зерттеуде жүйенің оң жағына қосымша шарттар жасау арқылы тек ғана орнықсыз болудың жеткілікті шартын ғана дәлелдеген.

Бұл қортынды біз қараған (7.2) мысалдың дербес жағдайы болып отыр.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диплом жұмысында түбірлі қауіпті жағдай үшін орнықтылықтың шарты алынған. $\lambda_1 = 2\lambda_2$ ішкі резонанс кезінде алынған қортындыдан [7] жұмыс осы жұмыстың жеке жағдайы болып шығады. Ішкі резонанс $2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ зерттеуінде оның реті 5-ке тең болған жағдайын диплом жұмысында жан-жақты талдау жасалған. (1) жүйенің нөлдік шешімінің орнықты болуының 4-жуықтауда қажетті және жеткілікті шарты алынған. Сондай-ақ тақ ретті ішкі резонанс кезіндегі 3-қысты таза жорамал түбірлі қауіпті жағдай үшін орнықтылықтың шарты дәлелденген. 1 – тақырыпта дифференциалдық теңдеулерге қозғалыс орнықтылығы туралы және орнықтылық пен орнықсыздық болу шарттары көрсетілген. Сондай-ақ дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің орнықтылығы туралы зерттеу беріледі. Теңдеулер жүйесін қарапайым түрге келтіру алмастырулары толық зерттелген. 7 – тақырыпта сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне талдау жасалып оның матрицасының анықтауышында таңба өзгерісі болғанда тек ғана оң шешімі болатынын, яғни САТЖ-ң оң шешімі болатынын дәлелдейтін қажетті және жеткілікті шарт табылып, теорема дәлелденген.

$2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ ішкі резонанс жағдайы толық талданып, мынадай қортындыға келген:

Теорема. Қарастырылған жүйе (7.1) төртінші жуықтаумен зерттелгенде әрқашан да $v = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 = const$ интеграл табылатынын көрсеткен. Егер осы интегралдың ішінде таңбасы оң анықталған интеграл болса, онда (7.1) жүйе төртінші жуықтауда орнықты болады. Егер барлық интеграл таңбасы айнымалы болса, онда (7.1) жүйе 4-жуықтауда орнықсыз болады. Орнықсыздықты дәлелдеу үшін Четаев теоремасы пайдаланылды, яғни табылған функция облыс шекарасында нөлге айналып, облыс ішінде оның туындысы да дифференциалдық жүйе көмегімен алынған толық туындысы да оң болып отырады. Бұл Четаев теоремаларының орнықсыздығы туралы шарттарын толық қанағаттандырады. Ал орнықтылықты дәлелдеген кезде, анықтауыштарда таңба өзгерісі болса Ляпунов функциясы оның толық туындысы нөлге айналып, орнықтылық анықтамасын қанағаттандырады. Әрбір талдаулар соңында, мысалдар келтіріліп, оны жан-жақты талданады. Самолет қозғалысы туралы зерттеліп, орнықтылық шарты алынған.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Нұрпеисов С.А. – «Иследование одного из особых случаев задачи об устойчивости движения.» Вестник Алматинского Университета энергетики и связи. №3 (30), 2018.

2 Нұрпеисов С.А. – «К вопросу о неустойчивости точек либрации.» Вестник АУЭС, 2019.

3 Нұрпеисов С.А. – «О стабилизации нелиней управляемый системы в критическом случае n пар чисто - мнимых корней.» Алматы: Вестник АУЭС, 2020.

4 Нұрпеисов С.А. – «Иследование устойчивости Ганильтоновых систем при наличии внутренного резонанса.» №2 (37), 2021.»

5 Ибрашев Х.И., Харасахал В.Х. – «Лекции по теории устойчивости» Алматы, 1954.

6 Daglberg E. – «Lyapunov functions for linearly indeterminate fixed points.» I. Math. Analys and Appl, 1970, vol. 22, №3, P. 465 – 489.

7 Нуржауов Т. – «К исследованию устойчивости установившихся движений в критическом случае n пар чисто - мнимых корней» Канд. дисс. , Алматы, 1969.

Әмірбек Дарын Қайрбекұлының "Ішкі резонанс жағдайындағы қозғалыстың орнықтылығын зерттеу" дипломдық жұмысына пікір

Бұл дипломдық жұмыста "Ішкі резонанс кезіндегі ($2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 2\lambda_2$) қозғалыстың орнықтылығы" зерттелген.

Мынадай

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{6} a_{sj}x_j + X_s(x_1, \dots, x_6) \ (s = 1,2, \dots, 6) \ (1)$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылған. Бұл жүйенің сипаттама теңдеуінің бірінші жуықтауы үш жұпты әртүрлі таза жорамал түбірлері $\pm i\lambda_s$ $(s = 1,2,3)$,

$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \text{ (резонанс 5 – ретті) } (2)$$

шартты қанағаттандырғандағы жүйе зерттелген. Қауіпті жағдайдағы үш жұпты таза жорамал түбірлері үшін орнықтылық талданған.

Ішкі резонанс 5 – ретті болып әсер еткенде, жүйенің оң жағын қатарға жіктегенде, оның мүшесі 4 – реттен басталғанына талдау жасалып, қозғалыс зерттелген. (1) жүйенің (2) шарт орындалғанда зерттеулері дифференциалдық теңдеулердің шешімін табуға өте көңіл бөлгенін көрсеткен. Дипломдық жұмысында түбірі қауіпті жағдай үшін, орнықтылықтың шарты алынған. $\lambda_1 = 2\lambda_2$ ішкі резонанс кезіндегі алынған нәтижелер осы жұмыстың жеке жағдайы болып шығады. Ішкі резонанс $2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ зерттеуінде оның реті 5 – ке тең болған жағдайы дипломдық жұмысында жан – жақты талдау жасалған. (1) жүйенің нөлдік шешімінің орнықты болуының 4 – жуықтауда қажетті және жеткілікті шарты алынған. Сондай – ақ тақ ретті ішкі резонанс кезіндегі 3 – қосты таза жорамал түбірлі қауіпті жағдай үшін орнықтылықтың шарты алынған. Теңдеулер жүйесін қарапайым түрге келтіру алмастырулары толық зерттелген. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне талдау жасалып, оның матрицасының анықтауышына таңба өзгерісі болғанда тек қана оң шешімі болатынын, яғни САТЖ – ң оң шешімі болатынын дәлелдейтін қажетті және жеткілікті шарт табылып, теорема дәлелденген.

Сонымен қарастырылған жүйе (1) жуықтаумен зерттелгенде әрқашан да $v = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 = const$ интеграл табылатынын көрсеткен. Егер осы интегралдың ішінде таңбасы оң анықталған интеграл болса, онда (1) жүйе төртінші жуықтауда орнықты болатыны көрсетілген. Егер барлық интеграл таңбасы айнымалы болса, онда (1) жүйе 4 – жуықтауда орнықсыз болатыны дәлелденген. Орнықсыздықты дәлелдеу үшін Четаев теоремасы пайдаланылып, яғни табылған функция облыс шекарасында нөлге айналып, облыс ішінде оның туындысы да, дифференциалдық жүйе көмегімен алынған толық туындысы да оң болып отыратынын жан – жақты дәлелдеген. Құрастырылған функциялар Четаев теоремасының орнықсыздығы туралы шарттарды толық қанағаттандырады. Ал орнықтылықты дәлелдегенде, анықтауыштардың таңба өзгерісі болса, Ляпунов функциясы оның толық туындысы нөлге айналып, орнықтылық анықтамасын қанағаттандырады. Әрбір талдаулар соңында, мысалдар келтіріліп, оны жан – жақты талдайды. Самолет қозғалысы туралы зерттеліп, орнықтылық шарты алынған.

Барлық мүмкін болатын жағдайлар үшін орнықтылықтың әртүрлі шарттарына талдау жүргізілген. 4 – ретті резонанс үшін, орнықтылық пен орнықсызыдық жөнінде дұрыс жауаптар талданғанын және орнықсыздықтан толық жүйенің орнықсыз болатынына талдау жүргізілген. Бұл қортындылар, бұдан бұрынғы алынған талдаулармен келісетінін көруге болады. Сондай – ақ кейбір авторлардың талдаған жеке зерттеулері, бұл дипломдық жұмыстың дербес жағдайы болып шығады.

Сондықтан бұл дипломдық жұмыс ғылыми бағытта жазылған, жоғары бағалауға 90% - ке тұрады деп бағалаймын.

Пікір жазған профессор HR департамент HR департамент Уаисов Б.

Әмірбек Дарын Қайрбекұлының "Ішкі резонанс жағдайындағы қозғалыстың орнықтылығын зерттеу" тақырыбына жазылған дипломдық жұмысына пікір

Қозғалыстың орнықтылық теориясын зерттеу кезінде, негізгі есептердің бірінші ретті жуықтау арқылы шешімі табылмайтын жағдайлар, оның қауіпті жағдайлар кезінде, зерттеуде жиі кездеседі. Әрине бұл, зерттеуге тиісті негізгі есеп болып табылады. Бұл бағытта көптеген ірі жұмыстар оқулықтарда, ғылыми жұмыстарда жарық көрді. Қауіпті жағдай кезінде А. М. Ляпунов ірі көлемді жаңалықтар ашты:

1. Сипаттама теңдеудің бір түбірі нөл, ал қалған n түбірінің нақты бөлігі теріс жағдайын.
2. Сипаттама теңдеудің таза жорамал бөлігі 2 жұпты ал қалған n түбірінің нақты бөлігі теріс болғанда толық зерттеу жүргізген.
   Кейін, қауіпті жағдайда зерттеулер Малкин, Молчанов, Красовский, Персидский, Ятаев, Зубов, Каменков жұмыстарында жиі орын алды. Орнықтылықты зерттеуде сипаттама (характеристикалық) теңдеуінің әртүрлі түбірі жұп таза жорамал болған жағдайын (қауіпті жағдайын зерттеу) Веретенников В. Г, Гольцер Я. М, Каменков Г. В, Нуржауов, Ятаев М. Я жұмыстарында орын алды. Бұл жұмыстардың барлығында "ішкі резонанс" болмаған кездерін қарастырған. Атап айтқанда, егер зерттейтін теңдеулер жүйесін мына

$$\begin{cases} \frac{dx_s}{dt} = i\lambda_s x_s + X_s(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n), \\ \frac{dy_s}{dt} = -i\lambda_s y_s + Y_s(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \end{cases} (s = 1,2, \dots, n) \quad (1)$$

түрде қарастырған.

Мұндағы x_s, y_s – түйіндес комплекс айнымалылар, X_s, Y_s – аналитикалық функциялар, қатарға жіктегенде 2 – реттен басталады, ал $\lambda_s > 0$ мынадай шартты қанағаттандырады:

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n \neq 0, \sum_{s=1}^{n} |m_s| \leq \mathcal{L} \ (2)$$

m_s – бүтін сан, $\mathcal{L}$ - өте үлкен сан.

Соңғы кездері (әсіресе 21 ғасырда) (1) дифференциалдық жүйенің (2) шарт орындалмаған кезін ($m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n = 0$) зерттеу жиі қарастырылуда, себебі табиғатта мұндай қозғалыс теңдеулері жиі кездеседі екен.

Анықтама. (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі m – ретті ішкі резонанс $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ болу үшін (3) $m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n = 0$,

$|m_1| + \dots + |m_n| = m \neq 0$ теңдік орындалуы керек.

Мұндағы $|m_s|$ – өзара жай сан.

(3) шарт орындалғанда, теңдеулер жүйесінде күрделі өзгеріс енгізеді, оның шешімін табуда λ_s арасында қатыстар қиындық туғызады. Сондықтан ішкі резонанс, яғни (3) шарттың орындалуы жаңа бағытта зерттеулерді керек етеді. Бұл бағытта Ибрагимова, $(\lambda_1 - \lambda_2 -$

$\lambda_3 = 0$), 6 – ретті "ТЖ" Куницын А. Л ($m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = 0$) 3 жұпты 6 – ретті теңдеулер жүйесін қарастырған. ($n = 3$)

Бұл дипломдық жұмыста (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін $2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ резонанс әсері болғанда ($m = 5$ –тақ) орнықтылықты жан – жақты зерттеген, нақты мысалдар келтіріліп, модельдер жасалған.

Қауіпті жағдайда, қозғалыстың орнықтылығын зерттеу А. М. Ляпунов талдауларының жалғасын дамытуда үлкен бағыт басталғанын математиктер, механиктер өте жақсы түсінген. Соңғы кездері бұл саламен Ресей математиктері, шетел математиктері айналысып, оны дамыту жолында ірі ғылыми жұмыстарын жариялап жүр. Бұл дипломдық жұмыста ішкі резонанс 5 – ретті болған жағдайда толық жан – жақты зерттелген. Резонанстық мүшеге байланысты, оның дифференциалдық теңдеулер жүйесіне әсер еткендегі қозғалыс қарастырылып, оның шешімінің орнықтылығы, орнықсыздығы дәлелденген.

Теңдеулер жүйесінің матрицасы талданып, оның рангісінің әртүрлі мәндерінде талдау жасалып теоремалар дәлелденген.

Орнықтылықты ішкі резонанс кезінде зерттеу, қазіргі кезде ең жаңа бағыттардың бірі болып жүр. Дипломдық жұмысында резонанс реті тақ жағдайы қарастырылып, жүйенің оң жағын қатарға жіктегенде, оның мүшелерінің дәрежесі жұп дәрежеден басталғанына талдау, зерттеулер жүргізіп орнықтылық, орнықсыздық бағытына талдау жасаған. Бұл бағыттағы талдаулар, алынған нәтижелер бұдан бұрынғы кейбір қорытындылармен келіседі және оны жалпылайды. Сондықтан Әмірбек Дарын Қайрбекұлының "Ішкі резонанс жағдайындағы қозғалыстың орнықтылығын зерттеу" дипломдық жұмысын 90% - ке бағалаймын.

Жетекшісі: Нұрпейсов С.А.

HR Қызметі

Университеттің жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаменті директорының ұқсастық есебіне талдау хаттамасы

Жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаментінің директоры көрсетілген еңбекке қатысты дайындалған Плагиаттың алдын алу және анықтау жүйесінің толық ұқсастық есебімен танысқанын мәлімдейді:

Автор: Әмірбек Дарын Қайрбекұлы

Тақырыбы: Ішкі резонанс жағдайындағы қозғалыстың орнықтылықтылығын зерттеу

Жетекшісі: Сатыбалды Нурпеисов

1-ұқсастық коэффициенті (30): 0.3

2-ұқсастық коэффициенті (5): 0

Дәйексөз (35): 0

Әріптерді ауыстыру: 1

Аралықтар: 0

Шағын кеңістіктер: 0

Ақ белгілер: 0

Ұқсастық есебін талдай отырып, Жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаментінің директоры келесі шешімдерді мәлімдейді :

☒ Ғылыми еңбекте табылған ұқсастықтар плагиат болып есептелмейді. Осыған байланысты жұмыс өз бетінше жазылған болып санала отырып, қорғауға жіберіледі.

☐ Осы жұмыстағы ұқсастықтар плагиат болып есептелмейді, бірақ олардың шамадан тыс көптігі еңбектің құндылығына және автордың ғылыми жұмысты өзі жазғанына қатысты күмән тудырады. Осыған байланысты ұқсастықтарды шектеу мақсатында жұмыс қайта өңдеуге жіберілсін.

☐ Еңбекте анықталған ұқсастықтар жосықсыз және плагиаттың белгілері болып саналады немесе мәтіндері қасақана бұрмаланып плагиат белгілері жасырылған. Осыған байланысты жұмыс қорғауға жіберілмейді.

Негіздеме:

2024-05-23

Күні *Кафедра меңгерушісі*